Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 33, núm. 2, 2018. Pàg. 111–145. DOI: 10.2436/20.2002.01.82

# Gaspard Monge

Agustí Reventós

**Resum:** Aquest article vol ser un tribut a l'obra de Monge en el camp de la geometria diferencial de corbes i superfícies en els dos-cents anys de la seva mort. Després d'un breu recordatori de la seva biografia, ens centrem en els seus treballs sobre evolutes de corbes a l'espai i sobretot en el naixement de les línies de curvatura en un article dedicat al transport de terres. Analitzem en detall el full xv de les seves famoses *Feuilles d'analyse* i fem un breu comentari de la resta dels seus treballs sobre geometria diferencial. Acabem amb una nota de Josep Lluís Solé sobre un dels amics i biògraf de Monge: François Arago.

Paraules clau: Monge, corbes, superfícies, evolutes, línies de curvatura.

Classificació MSC2010: 53A04, 53A05, 01A50.

## 1 Introducció

El 28 de juliol d'aquest any 2018 s'ha complert dos-cents anys de la mort del gran geòmetra Gaspard Monge (1746–1818). Intentaré donar una visió resumida de la seva vida i obra centrant-me, però, només en els treballs de geometria diferencial, ja que l'obra global de Monge és immensa i abraça des de la química, a la meteorologia, la mecànica, etc.

Gaspard Monge (1746–1818).

A Monge se'l pot considerar, juntament amb Euler i Gauss, com el fundador de la geometria diferencial de corbes i superfícies. També se'l considera creador de la teoria de derivades parcials de segon ordre, que ell sempre estudiava lligades a problemes geomètrics, però que han tingut posteriorment tanta importància en altres camps.

Els treballs sobre la vida i l'obra de Monge escrits per persones que el coneixien directament i que són molt complets són els dels seus deixebles Charles Dupin [T7], de 1819, i el de François Arago [T1], de 1846.

El treball de Dupin es titula *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*. Després d'una primera part biogràfica conté els capítols següents: «Géométrie pure et descriptive», «Géométrie analytique», «Géométrie appliquée aux arts», «Géométrie appliquée à la méchanique», «Physique: Attraction moléculaire», «Optique», «Météorologie», «Technologie: Feutrage», «Chimie générale», «Arts chimiques: Métallurgie», «Économie domestique: Frabrication des fromages de Lodézan», «Ouvrages et Mémoires publiés par G. Monge», «Monument à eriger en honneur de Monge», «Liste de souscripteurs».

Com veieu, hi podeu trobar la llista exhaustiva de les publicacions de Monge i els seus diversos camps d'interès, inclosos els formatges![1]

Dupin també fa un retrat de Monge que ens pot ajudar a acostar-nos al personatge ([T7, p. 150]):

> Il étai d'une haute stature, la force physique se montrait dans ses larges muscles, comme la force morale se peignait dans son regard vaste et profond. Sa figure était large et raccourcie comme la face du lion. [...] Dés qu'il parlait, on croyait voir un autre homme..., un feu nouveau brillait dans ses yeux.
>
> [Era alt, la força física es veia en els seus llargs muscles, com la força moral es reflectia en la seva mirada vasta i profunda. La seva figura era ampla i escurçada com la cara d'un lleó. [...] Quan parlava, hom creia veure un altre home..., un foc nou brillava en els seus ulls.]

El treball d'Arago[2] fou llegit a l'Académie des sciences el 1846, consta de 157 pàgines, i s'hi veu en tot moment la gran estima que Arago sentia per Monge. Dona molta informació interessant, per la proximitat temporal, sobre la Revolució Francesa i la campanya d'Egipte.

---

1 Dupin va dedicar el seu primer llibre, *Développements de géometrie* [A1], de 1813, a Monge posant com a subtítol *Pour faire suite a la Géométrie Descriptive et a la Géométrie Analytique de M. Monge*, i dient:

> MON ILLUSTRE MAÏTRE, Je vous dédie mon premier Ouvrage dans un genre où je dois tout à vos leçons; vos encouragements m'ont engagé dans la carrière aplanie par vos travaux [...]
>
> [IL·LUSTRE MESTRE, us dedico la meva primera Obra sobre un tema en el qual ho dec tot a les vostres lliçons; els vostres encoratjaments m'han compromès en la carrera aplanada pels vostres treballs [...]]

2 Per saber més sobre Arago, vegeu la secció 8, escrita per Josep Lluís Solé Clivillés.

Així mateix hem consultat els elogis fúnebres de dos dels seus primers alumnes a l'École polytechnique, N. Guyon [T10] i B. Brisson [T3], del mateix 1818.

També són d'interès els elogis que el 1849 dedica a Monge el director de l'escola de Beaune, F. Ravailhe [T12]. Es tracta de l'escola on va estudiar Monge de petit. Aquests elogis estan dedicats a la filla de Monge, Émilie, en aquell moment Madame Marey Monge, ja que s'havia casat amb Nicolas-Joseph Marey el 1789. El motiu és que l'esposa de Monge havia llegat al col·legi de Beaune la quantitat de 3 000 francs per dotar d'una beca anual l'alumne més distingit en matemàtiques durant l'any. El premi l'entregaven els fills d'Émilie.

Una obra molt documentada és *Un grand français. Monge fondateur de l'École polytechnique* [T5], de Louis de Launay (1933). Aprofundeix molt en la relació entre Monge i Napoleó i les tasques de Monge com a president del Senat. Però l'autor que més ha estudiat Monge, uns anys més tard (1951), és sens dubte René Taton a *L'œuvre scientifique de Monge* [T16]. És l'obra definitiva sobre el tema.

Trobareu més detalls sobre la vida, obra, deixebles i continuadors de Monge a les notes biogràfiques de Struik [T15]. També a l'article que Sergescu va escriure el 1946 amb motiu del bicentenari del naixement de Monge [T14].

Altres referències són els articles de Bruno Belhoste «Gaspard Monge: Urgences revolutionnaires et utopie» [T2] (1989), de José J. Etayo «Las bases de la Geometría Diferencial» [T8] (1993), i de Rémi Langevin «Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure» [T11] (2002). També hi ha una molt bona informació a la Viquipèdia.

Les llistes bibliogràfiques que tanquen aquest article, tant la que es refereix als treballs de Monge com la dels treballs sobre Monge, no són exhaustives i fan referència només a les obres que he consultat. He procurat, això sí, que a la llista de treballs de Monge apareguin tots els relacionats amb la geometria diferencial, però les fronteres matemàtiques són difuses.

## 2 Breu biografia

Gaspard Monge neix el 9 de maig del 1746 a Beaune. Va ser el primer dels tres fills de Jacques Monge, un comerciant que va portar una vida de privacions per poder portar els fills a l'escola, concretament al Collège d'Oratoriens de Beaune.

El 1762 Gaspard acaba els estudis de filosofia, física i matemàtiques a Beaune. Amb només setze anys és nomenat professor de física a Lió. Segons Ravailhe [T12], el seu pare el va acomiadar dient: «Fill meu, recorda que en tota circumstància deus respecte als teus superiors i exemple als teus inferiors».

El 1764 fa un plànol detallat de Beaune que ofereix a la municipalitat. El coronel de Vignan, segon comandant de l'École royale du génie de Mézières,[3] sap apreciar el treball i proposa al seu autor d'anar a Mézières.

3 L'escola d'enginyers de Mézières va ser fundada el 1748 pel cavaller de Chastillon, per tal de formar enginyers militars experts en fortificacions. Va agafar de seguida gran reputació. Les matemàtiques i la física eren ensenyades pels prestigiosos professors i abats Bossut i Nollet.

Hi entra, però com a alumne de segona categoria, destinat a un taller annex. Sembla que aquí ja treballa amb dovelles de guix, cosa que potser l'influirà en els seus treballs posteriors sobre el tall de pedres.

Per tal de resoldre problemes pràctics de fortificacions inventa, quan tenia aproximadament uns dinou anys, la *geometria descriptiva*. Com que aquests coneixements podien caure en mans de l'enemic, se li ordena de «ne rien divulguer ni verbalement ni par écrit».[4] No va poder explicar aquestes coses fins al 1794, quan es va crear l'École normale. Això va ser poc després del 9 de termidor,[5] quan la Convenció Nacional (règim polític que va governar França del 1792 al 1795) va sentir la necessitat de reorganitzar la instrucció pública.

El 1768 passa de *répétiteur*[6] a professor a Mézières i el 1771 es fa càrrec dels ensenyaments de matemàtiques i física. Aquest any fa un primer viatge a París, on coneix Condorcet, d'Alembert i Vandermonde; aquest últim tindrà un paper important durant la Revolució i exercirà influència sobre Monge. Vegeu «Monge, géomètre et Jacobin», de J. Chapelon [T4]. El 1772 és nomenat *correspondant* a l'Académie des sciences per un tribunal format per d'Alembert, Bossut i Condorcet.

Es casa el 1777 amb Marie-Catherine Huart, vídua Horbon, amb qui té tres filles, Émilie, Louise i Adélaïde.[7]

El 14 de gener del 1780 Monge és elegit geòmetra adjunt de l'Académie des sciences, en substitució de Vandermonde. Això li exigeix estar-se a París almenys cinc mesos per any. Durant aquests períodes ajudava l'abat Bossut en els seus cursos al Louvre. Es va dedicar a la física i la química, va treballar amb Lavoisier, publicant memòries sobre la síntesi de l'aigua, tema de moda a l'època.

El 1783 mor Étienne Bézout, que exercia d'examinador dels alumnes de marina, i Monge és nomenat per a aquest càrrec. Això el fa abandonar definitivament l'École royale du génie de Mézières, ja que havia de viatjar molt. Va rebre de l'École una pensió de 1 000 lliures per any.

Quan esclata la Revolució Francesa, Monge és un dels científics més coneguts, probablement més pels seus treballs de física i química que com a matemàtic. Ocupa diversos llocs de direcció al club dels jacobins, i forma part de la comissió de pesos i mesures per introduir el sistema mètric decimal.[8]

4 Diversos autors posen en dubte aquesta afirmació d'Arago.

5 Dia de l'arrest de Robespierre, 27 de juliol del 1794.

6 S'estava amb els alumnes a les sales d'estudi ajudant-los amb els treballs gràfics. Repetia el que havia explicat el professor.

7 Napoleó, en el seu desterrament a Santa Helena, va dir que Monge havia ofert les seves filles en matrimoni als primers soldats ferits en defensa de França, però Arago, després d'una conversa amb l'esposa de Monge, ho desmenteix o almenys ho matisa.

8 Monge ja participà en la comissió que l'Académie creà el 1789 per estudiar un pla per a la uniformització dels pesos i mesures, la qual aconsellà la proposta de Talleyrand a l'Assemblée National el 1790, en la qual exposen els avantatges de triar la longitud del pèndol que bat un segon en el paral·lel 45 com a unitat de mesura. El 1791 la proposta ja ha canviat: es decideix que la nova unitat sigui una fracció del meridià, i que es faran noves mesures del meridià de París entre Dunkerque i Barcelona (l'Académie necessita fer-se necessària en els convulsos temps revolucionaris). Monge i Meusnier són encarregats de mesurar les bases de la triangulació, però

A finals del 1792[9] és elegit, per l'Assemblea, ministre de la Marina, càrrec que exercirà només fins a l'abril del 1793. El setembre del 1793 és encarregat, juntament amb Vandermonde i Berthollet, d'organitzar la fabricació de l'acer, per tal d'accelerar la fabricació d'armes. Publica *Description de l'art de fabriquer les canons* com a manual per a les fàbriques.

École polytechnique, de 1805 a 1976.

L'11 de març del 1794[10] el Comitè de Salut Pública crea una comissió formada per Jacques-Éli Lamblardie, Gaspard Monge i Lazare Carnot amb la missió d'organitzar una «école central de travaux publics». Finalment s'inaugura el 21 de desembre amb seu al Palais Bourbon. L'1 de setembre del 1795 l'escola canvia de nom, passa a dir-se École polytechnique i s'ubica a l'Hôtel de Lassay. Es considera Monge com el seu principal fundador i impulsor. La seva experiència de vint anys a l'École royale du génie de Mézières va ser fonamental.

Monge va ser l'ànima de l'École. En va ser director del 1796 al 1799. Vivia rodejat dels seus alumnes, a qui no dubtava d'ajudar en tot el que podia, inclús oposant-se a l'emperador. Avui dia és universalment reconegut com un gran professor. Taton [T16], a la pàgina 367, cita paraules de Jomard, un dels alumnes de Monge:

> Quand il décrivait une surface il la dessinait de ses mans... et l'engendrait avec un geste éloquent de maniere à la rendre palpable; [...] il avait l'art de rendre simples les choses les plus compliquées et claires les plus obscures.

---

no compliran aquesta tasca ja que Meusnier, general de l'exèrcit, mor el 1793 en el setge de Mainz, i Monge és nomenat ministre.

També el 1793, el govern revolucionari suprimeix per elitisme l'Académie, però constitueix una «Comission temporaire des poids et mesures» en la qual hi ha Monge. Sense esperar els resultats de les medicions de Delambre i Méchain, s'acorda el 1795 definir un metre provisional, basat en les mesures del meridià fetes per La Caille quaranta anys abans. Monge col·labora en els càlculs corresponents.

Finalment, el 1798, una nova comissió estudia les dades aportades per Delambre i Méchain i encara que Monge hi figura, tampoc pot participar-hi, ja que acompanya Napoleó a Egipte.

Una referència molt bona sobre aquesta història apassionant és: Antonio E. Ten (1996), *Medir el Metro*, Instituto de Estudios Documentales e Históricos sobre la Ciencia, Universitat de València. [Peu de pàgina escrit per Josep Lluís Solé.]

9 El 13 d'agost del 1792 Lluís XVI és detingut i substituït per un consell format per ministres elegits per l'Assemblea.

10 «21 ventôse, an II», amb la notació de l'època.

> [Quan descrivia una superfície la dibuixava amb les seves mans... i l'engendrava amb un gest eloqüent per fer-la palpable; [...] tenia l'art de fer simples les coses més complicades i clares les més fosques.]

Entre els deixebles de Monge destaquem Charles de Tinseau d'Amondans (1748–1822) i Jean Baptiste Meusnier (1754–1793), que ja van ser alumnes seus a Mézières. Citem també Sylvestre Lacroix (1765–1843), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), Michel Ange Lancret (1774–1807), Joseph Diez Gergonne (1771–1859), André-Marie Ampère (1775–1836), Sophie Germain (1776–1831) (amb nom fals), Pierre Charles François Dupin (1784–1873), Louis-Léger Vallée (1784–1864), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Michel Chasles (1793–1880), Théodore Olivier (1793–1853), Benjamin Olinde Rodrigues (1795–1851), Gabriel Lamé (1795–1870), Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886), etc.

Monge va ser també un dels principals inspiradors del *Journal de l'École polytechnique*.[11] El primer article del primer volum del *Journal*, aparegut el 1794, és de Monge i es titula «Stéréotomie» [M8]. L'estereotomia és l'art de tallar i acoblar les peces de pedra o fusta, per tal de construir elements arquitectònics com ara arcs, mènsules, trams d'escales, etc.

Les primeres tres línies diuen:

> La géométrie descriptive est l'art de représenter sur des feuilles de dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles d'une définition rigoureuse.

> [La geometria descriptiva és l'art de representar sobre els fulls de dibuix que no tenen més que dues dimensions, els objectes que en tenen tres, i que poden ser definits rigorosament.]

Els apunts de classe de Monge apareixen en diverses notes posteriors del *Journal*, signades per Eisenman i amb el mateix títol genèric de «Stéréotomie» [A3].

En aquesta època Monge va començar a parlar als seus alumnes de *geometria analítica* per referir-se al que fins al moment s'anomenava simplement *àlgebra aplicada a la geometria*.[12]

El 1796 va a Itàlia com a membre d'una comissió que ha de recollir «les monuments d'art et de science que les traités de paix accordaient aux armées françaises victorieuses». Com diu Louis de Launay [T5], un saqueig organitzat.

---

11 A `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v/date.r=journal+ecole` podeu trobar els volums entre els anys 1794 i 1938.

12 Lacroix, en el seu *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* [A8], de 1797, per referir-se als treballs de Monge on aquest utilitza derivades parcials per generar superfícies, com per exemple «Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes» [M6], diu: «Voyez sa Géométrie Analytique». Per aquest motiu es considera aquest llibre de Lacroix com el primer lloc on apareix aquesta expressió de *geometria analítica* (pàgina 504 de la quarta edició de Bachelier de 1828).

A [T5] podeu trobar informació sobre els cinc combois amb obres d'art que es van organitzar. Torna a París el 1797 i és nomenat director de la «pauvre École polytechnique», com diu ell mateix, que estava en hores baixes. Encara farà un segon viatge a Roma motivat per l'assassinat del general Duphot, que el Directori li encarrega investigar. I per comminar el papa Pius VI a abandonar el poder temporal. El Papa abandona Roma el 20 de febrer del 1798. Aquesta estada coincideix amb els preparatius de la campanya de Napoleó a Egipte.

Segons Arago, Napoleó s'havia sentit molt ben tractat pel ministre de marina Monge quan ell era un jove oficial d'artilleria. Això va fer néixer una amistat entre Monge i Napoleó, qui insisteix fortament perquè l'acompanyi a la campanya d'Egipte. Una amistat en la qual Napoleó manava i Monge obeïa.

Es troba amb Napoleó a Malta el 9 de juny del 1798. L'illa és conquerida el 10 de juny i el 13 de juny ja s'hi creen tretze escoles primàries i una escola central per ensenyar matemàtiques, astronomia, etc.

Un cop a Egipte va amb Napoleó fins a Ramanieh, on se separen i Monge remunta el Nil amb Berthollet. Són atacats pels turcs i els mamelucs, però salvats finalment per les tropes franceses.[13] És llavors, el 20 de juliol del 1798, que Napoleó diu davant la piràmide de Gizeh la cèlebre frase: «Soldats, du haut de ces monuments, quarante siècles vous contemplent!».

Posteriorment Napoleó crea l'Institut d'Egipte i en confia la presidència a Monge.[14] Pren part també en l'expedició a Síria, però es posa malalt i torna a París amb Napoleó l'octubre del 1799. Fan el viatge de Fréjus a París en cotxe de sis cavalls Berthollet, Monge i Napoleó. Segons Arago, la gent s'estranyava de veure Napoleó en companyia de dues persones mal vestides (feia gairebé dos anys que eren fora de casa). El desembre del mateix any és nomenat senador.

El 1803 acompanya Napoleó per Bèlgica i el nord de França. Tornant, és nomenat per a la senadoria de Lieja. Sembla que no ho accepta de gaire bon grat, ja que en una carta a la seva dona per justificar la seva absència comenta que «Le Premier Consul a tant fait pour moi que je dois faire ce que je puis pour lui». Hi fa llargues estades entre 1803 i 1805, any en què Napoleó dona a l'École polytechnique un estatus militar i la situa a la muntanya de Santa Genoveva a París.

Del maig del 1806 al setembre del 1807 és president del Senat de l'emperador, i rep una donació que ell mateix havia sol·licitat en favor de Berthollet de cent mil francs, amb la qual compra el castell de Bierre, a la Borgonya.

Nomenat compte de Péluse, el 1808, rep en dotació diverses propietats a Westfàlia.

---

13 El butlletí oficial del combat fa menció de la bravura de Monge i Berthollet. Però aquest últim es va omplir les butxaques de pedres per anar al fons del riu i no ser capturat i mutilat pels ferotges mamelucs. Molts d'aquests mamelucs es van acabar posant posteriorment al costat de Napoleó.

14 Del procés verbal (Arago [T1]): *le citoyen Monge, president; le citoyen Bonaparte, vice-président, pour le premier trimestre; et le citoyen Fourier, secrétaire perpétuel.* Sobre la campanya d'Egipte vegeu *Gaspard Monge et l'expedition d'Égypte*, de Jean-Baptiste Sanson de Pongerville [T6].

El 1809, començant a sentir-se cansat, deixa amb recança l'École polytechnique; però no la relació científica que hi tenia, ja que entre 1810 i 1816 encara podem trobar a *Correspondance sur l'École impériale polytechnique* set notes molt breus de Monge, potser la més important de les quals és «Sur les équations différentielles des courbes du second degré» [M17].

El 1813 intenta organitzar la resistència contra els invasors (Àustria, Rússia i Prússia). El febrer del 1814, dos mesos abans que Napoleó fos desterrat a Elba, pel tractat de Fontainebleau, destrueix part dels seus documents de la Revolució, en particular la correspondència amb Napoleó, i, fugint de l'enemic, abandona París el 29 de març.

Quan torna a París el 1816, després d'haver estat amagat un temps, veu destruir la seva obra: l'École polytechnique és primer suprimida i després reorganitzada, és exclòs de l'Académie des sciences,[15] etc. Mor el 28 de juliol del 1818. Els alumnes de l'École polytechnique no van tenir autorització per assistir als funerals de Monge, que no va rebre cap homenatge oficial, però van aprofitar el primer dia de sortida per anar-se a inclinar sobre la tomba del fundador de la seva escola.

## 3 Memòria sobre les evolutes

Comentem a continuació el que es considera com el primer article de Monge [M7]. El 22 de gener del 1769 Monge va escriure a l'abat Charles Bossut per a explicar-li que estava treballant en «développées» de corbes de doble curvatura.[16]

> En réfléchissant dernièrement sur ce qui arrive à plusieurs surfaces courbes que l'on fait mouvoir les unes sur les autres pour engendrer des épicycloïdes sur toutes sortes de surfaces, je suis parvenu à trouver les développées des courbes à double courbure. [Taton [T16, p. 166]]
>
> [Reflexionant darrerament sobre el que passa a diverses superfícies corbes que es fan moure les unes sobre les altres per engendrar epicicloides sobre tot tipus de superfícies, he arribat a trobar les evolutes de les corbes de doble curvatura.]

Recordem que la *développée* o *evoluta* d'una corba plana és la corba que s'obté com a envolvent de les seves normals. Equivalentment, és la corba que té la propietat que un cordill embolicat sobre ella, en desembolicar-se, genera la corba donada. Monge generalitza aquesta construcció a l'espai exigint que en desenvolupar el cordill es vagi mantenint sempre sobre la superfície formada per les tangents a la corba (la *desenvolupable tangencial*).

15 Tothom va veure la greu injustícia que es feia amb Monge, i Cauchy va ser durament criticat pel fet d'acceptar el lloc vacant.

16 Amb l'expressió *corbes de doble curvatura* es refereix a corbes guerxes (no planars) de l'espai. Les dues curvatures serien en llenguatge actual la curvatura i la torsió.

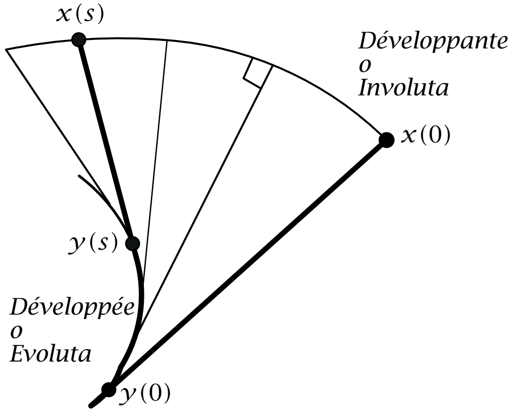


FIGURA 1: Evolutes i involutes.

Concretament, l'*evoluta* d'una corba $x(s)$ de l'espai és una altra corba $y(s)$ (la *développante* o *involuta*) tal que $x(s)$ està continguda a la desenvolupable tangencial de $y(s)$ i la tangent a $y(s)$ pertany al pla normal a $x(s)$ en el punt corresponent. Desenrotllant un cordill prèviament embolicat a $y(s)$, mantenint-lo en la superfície de les tangents, obtenim $x(s)$.

El juny del 1769 va aparèixer un sumari dels seus resultats al *Journal encyclopèdique*, editat a Bouillon per Pierre Rousseau, que es considera com la primera publicació de Monge.[17] El treball complet es va sotmetre a l'Académie des sciences de París l'octubre del 1770 i es va llegir davant l'Académie l'agost del 1771, però no es va publicar fins al 1785 amb el títol «Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differents genres d'inflexions des courbes à double courbure»; vegeu [M7] i les pàgines 392–420 de [M18].

Aquest article comença així:

> Tout ce que l'on a fait jusqu'à present sur les Développées des courbes en general se reduit à a voir trouvé celles des corbes planes [...] Je me propose de démontrer dans ce Mémoire qu'une courbe, plane ou à double courbure a une infinité de développées, toutes a double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane, et de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante.
>
> [Tot el que s'ha fet fins ara sobre les evolutes de corbes en general es redueix a haver trobat les de les corbes planes [...] Em proposo demostrar en aquesta Memòria que una corba, plana o de doble curvatura, té una infinitat d'evolutes, totes de doble curvatura, amb l'excepció d'una sola per a cada corba plana, i donar la manera de trobar les equacions d'aquestes corbes, donades les equacions de la involuta.]

17 Vegeu l'article de René Taton «La première note mathématique de Gaspard Monge» [T17], on es reprodueix aquest escrit.

La figura 2 mostra una corba plana i algunes de les seves evolutes, que, com ja va observar Monge, estan sobre la superfície polar, és a dir, la superfície reglada formada per rectes que passen pels centres de curvatura i tenen la direcció de la binormal corresponent.

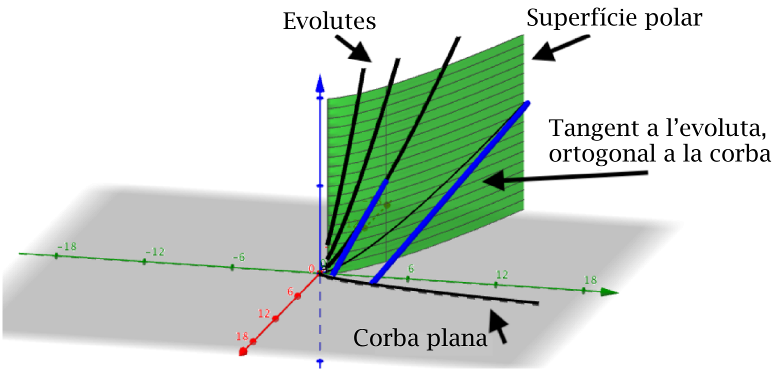


FIGURA 2: Evolutes i superfície polar.

Veiem com introdueix Monge l'eix polar. Comença observant que les normals en un punt no singular d'una corba a l'espai estan en un pla. En aquest pla es troba una recta que ell anomena «eix», que és el límit de la intersecció d'aquest pla amb el pla corresponent a un altre punt de la corba, infinitament pròxim. És a dir, cada punt $P$ de la corba té el seu «eix». Si hom traça una perpendicular des de $P$ a l'eix corresponent a $P$ i anomenem $Q$ el peu d'aquesta perpendicular, $Q$ serà el centre de curvatura, $PQ$ el radi de curvatura, i la inversa de la longitud $PQ$, la curvatura.

Com diu Girbau [A6], d'aquesta manera s'estableix clarament per primer cop la noció de *curvatura* d'una corba a l'espai.

La *torsió* hi apareix implícitament.[18] Amb notació actual l'eix polar corresponent al punt de paràmetre $s$ de la corba $\gamma(s)$ és la recta

$$r(u) : \gamma(s) + \rho(s)N(s) + uB(s),$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura i $N(s)$, $B(s)$ els vectors normal principal i binormal, respectivament.

La unió de totes aquestes rectes és la superfície reglada

$$\varphi(s,u) = \gamma(s) + \rho(s)N(s) + u\,B(s),$$

anomenada *superfície polar* associada a la corba $\gamma(s)$. Monge la calcula a la secció XX de l'article i troba que és la superfície envolvent de la família de plans

18 El concepte de torsió va ser definitivament establert més tard per Lancret a «Mémoire sur les courbes a double courbure» [A9], però havia estat usat ja per Lacroix a [A8]. L'anomenaven *segona flexió* o *segona curvatura*. El nom de *torsió* prové de Louis L. Vallée.

normals. És a dir, veu que el pla tangent a aquesta superfície en qualsevol dels seus punts coincideix amb un dels plans de la família de plans normals.

Demostra també que aquesta superfície és *desenvolupable*,[19] veient que les seves generatrius, els eixos polars, són tangents a la corba formada pels centres de les esferes osculatrius.

Aquesta corba dels centres és anomenada per Monge *arête de rebroussement*, nom que podríem traduir per *aresta de retrocés* o *eix de regressió*, de la superfície polar, i ve donada per

$$\gamma(s) + \rho(s)N(s) + \frac{\rho'(s)}{\tau(s)}B(s),$$

on $\tau(s)$ és la torsió de $\gamma(s)$ (suposada no nul·la). Monge la calcula a la secció XXII de l'article.

Els punts d'aquesta aresta no formen part de la superfície (són punts singulars), que queda, doncs, dividida en dues parts.

Tot això ho fa Monge amb arguments geomètrics com ara tallar un pla amb el «següent», etc., ja que aquesta superfície és, com hem dit, l'envolvent dels plans normals.

L'esfera osculatriu[20] la introdueix així a la secció XXIV:

> [...] dans toute courbe à double courbure trois éléments consécutifs sont toujours à égales distances d'un certain point, et peuvent, par conséquent, être regardés comme placés sur la surface d'une même sphère dont ce point est le centre.

> [[...] en tota corba de doble curvatura tres elements consecutius estan sempre a la mateixa distància d'un cert punt, i poden, per consegüent, ser vistos com situats sobre la superfície d'una mateixa esfera que té aquest punt com a centre.]

Dels càlculs anteriors es dedueix que el radi de l'esfera osculatriu és

$$R(s) = \sqrt{\rho(s)^2 + \left(\frac{\rho'(s)}{\tau(s)}\right)^2}.$$

També es veu que la corba formada pels centres de curvatura d'una corba (projecció d'aquesta corba sobre l'eix polar) no pot ser una evoluta de la

---

19 Una superfície reglada es diu *desenvolupable* si les rectes que la formen són tangents a una corba (eix de regressió). Equivalentment, són les superfícies reglades amb curvatura de Gauss zero o encara una altra equivalència: són les superfícies reglades tals que el pla tangent és constant al llarg de les generatrius.

20 Théodore Olivier (1793–1853), alumne de l'École polytechnique, estudia les esferes osculatrius i l'ordre de contacte d'aquestes amb les hèlixs, vegeu «De la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure» [A12]. És conegut pels seus models de superfícies que es tallen, superfícies formades per cordes i metall, que en moure's permeten estudiar la corba intersecció. Vegeu *Theodore Olivier Three-Dimensional Geometry String Models*, un àlbum editat pel Canada Science and Technology Museum.

corba donada a menys que aquesta sigui plana. En aquest cas tenim la clàssica evoluta, una corba les tangents de la qual són normals a la corba donada.

Donada una corba $x(s)$ Monge es proposa, a la secció XXV, trobar totes les corbes $y(s)$ (*les evolutes de* $x(s)$) tals que les tangents a $y(s)$ pertanyen al pla normal de $x(s)$. És a dir, vol trobar les corbes que si es desenvolupen pel mètode del cordill donen $x(s)$.

Amb notació actual s'obté

$$y(s) = x(s) + \rho(s)\big(N(s) + \cot\alpha(s)B(s)\big),$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura, $N(s)$, $B(s)$ la normal principal i la binormal de $x(x)$, i

$$\alpha(s) = \int_0^s \tau(t)\,dt + c,$$

amb $\tau(s)$ la torsió.

Cada valor de $c$ correspon a una de les infinites evolutes de la corba $x(s)$. Si $\tau = 0$, una de les evolutes és plana i les altres són hèlixs sobre el cilindre ortogonal al pla de la corba.

Quan parla dels *diferents gèneres d'inflexió*, a la secció XXX, es refereix al fet que la curvatura i la torsió es poden anul·lar. Ho diu així:

> [...] il peut arriver ou que trois éléments consécutifs d'une même courbe à double courbure se trouven dans un même plan, ou que deux de ces éléments soint en ligne droit. Il suit de là que les courbes à double courbure peuvent avoir deux espèces d'inflexions: la première a lieu lorsque la courbe devient plane, et nous l'appellerons *simple inflexion*; la seconde, que nous appellerons *double inflexion*, a lieu lorsque la courbe devient droite dans un de ses points.

> [[...] pot passar que tres elements consecutius d'una mateixa corba de doble curvatura es trobin en un mateix pla, o que dos d'aquests elements estiguin alineats. Se segueix d'això que les corbes de doble curvatura poden tenir dos tipus d'inflexions: la primera es dona quan la corba esdevé plana, i nosaltres l'anomenarem *inflexió simple*; la segona, que anomenarem *inflexió doble*, té lloc quan la corba esdevé recta en un dels seus punts.[21]]

Cap al final de l'article, a la secció XXXIII, troba l'expressió explícita del radi de curvatura de la corba (amb la seva notació $y = \varphi x$, $z = \psi x$)

$$\frac{[1 + (\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2]^{3/2}}{\sqrt{(\varphi'' x')^2 + (\psi'' x')^2 + (\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x')^2}}$$

que, posant $\sigma(s) = (s, \varphi(s), \psi(s))$, no és més que

$$\rho(s) = \frac{\|\sigma'(s)\|^3}{\|\sigma'(s) \wedge \sigma''(s)\|}.$$

21 Com és ben sabut, si la curvatura és zero en un interval, la corba és recta en aquest interval, i si la torsió és zero en un interval, la corba és plana en aquest interval. Però la curvatura i la torsió es poden anul·lar només en un sol punt (punt d'inflexió) i llavors la corba no és recta ni plana al voltant d'aquest punt.

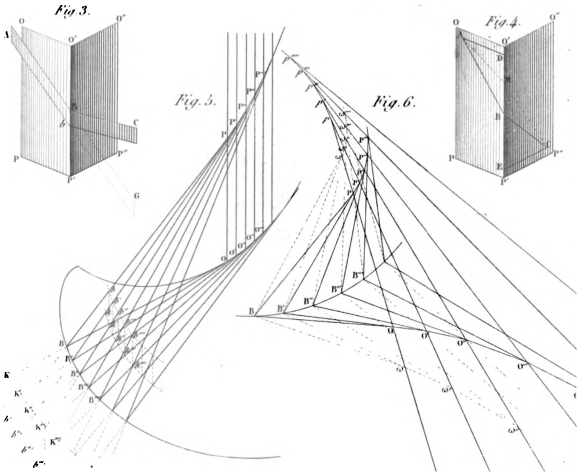


FIGURA 3: Detall de la planxa que tanca aquest article de Monge.

## 4 Ombres i penombres

L'11 de gener del 1775 Monge presenta a l'Académie el treball «Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres» [M1], que no es publica fins al 1780.

En aquesta memòria dona l'avui ben coneguda equació del pla tangent en funció de determinades derivades parcials, que denota per $p$ i $q$, notació que ha perdurat fins a l'actualitat. I també l'equació diferencial de les superfícies desenvolupables, $rt - s^2 = 0$, on ara $r$, $s$, $t$ són les derivades segones. Observeu que aquesta expressió només diu que la curvatura de Gauss és zero ja que és el determinant de la segona forma fonamental. El problema I d'aquest l'article està dedicat a trobar l'equació general de les superfícies desenvolupables. En dona tres solucions i alguns corol·laris.

El problema II consisteix a trobar les superfícies tals que la relació entre l'àrea d'una part qualsevol d'elles i la seva projecció [sobre un pla] és constant. Òbviament, amb la mateixa notació que anteriorment, ha de passar que $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ sigui constant i, per tant, que $p$ sigui funció de $q$.

A continuació introdueix la *théorie générale des ombres et des pénombres*. Dona una definició precisa d'ombra i penombra suposant primer que hi ha un punt de llum i un cos opac que la tapa i suposant després que la llum prové d'una superfície. Demostra que en aquest cas l'ombra «pura» està delimitada per una superfície desenvolupable circumscrita a la vegada a les superfícies del cos lluminós i del cos opac. Dona una definició intuïtiva de penombra i demostra que està determinada per una altra superfície desenvolupable parcialment circumscrita també a les superfícies dels cossos opac i lluminós.

La diferència entre aquesta superfície i la primera és que l'aresta de retrocés (*arête de rebroussement*) es troba entre els dos cossos i en el primer cas els dos cossos són al mateix costat d'aquesta aresta. Aquestes demostracions les presenta sense fer cap càlcul.

Posa com a exemple el cas de dos cossos esfèrics, com els de la figura 4.

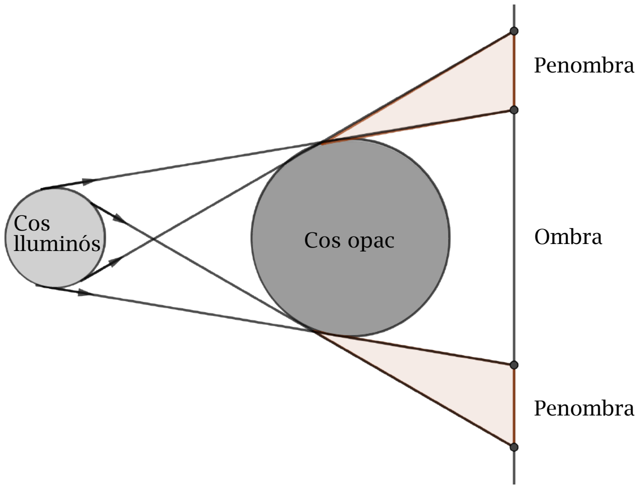


FIGURA 4: Ombres i penombres.

El problema III d'aquest article consisteix a trobar, per a una superfície donada, l'equació de la corba intersecció d'aquesta superfície amb un con circumscrit a la mateixa, de vèrtex un punt donat. Està estudiant, doncs, ombres i penombres en el cas particular en què el cos lluminós es redueix a un punt. Actualment es diu que aquesta corba és la corba generadora del contorn o corba generatriu. Està caracteritzada per la condició de ser el vector normal a la superfície sobre aquesta corba perpendicular en cada punt a la recta determinada per aquest punt i el punt de llum. Monge, a l'article que comentarem a continuació, [M2], en diu *corba de contorn aparent*.

L'article [M1] acaba amb un parell de problemes sobre el mateix tema. El problema IV s'ocupa de trobar la superfície cònica amb vèrtex donat que passa per una corba donada, i en el problema V estableix les equacions de les superfícies que envolten l'ombra i la penombra d'un cos opac il·luminat per un cos lluminós.

## 5 Teoria del transport

En aquesta secció estudiem un dels articles més importants de Monge, «Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais» [M2], de 1781.[22]

22 Aquest article està molt ben estudiat per Étienne Ghys a [T9]. Comenta Ghys que, com en altres treballs de Monge, es barreja aquí la teoria i la pràctica. Monge parteix d'un problema pràctic,

Aquest article comença parlant del transport de terres.

> Lorsqu'on doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, et le nom de *Remblai* à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.
>
> [Quan s'han de transportar terres d'un lloc a un altre, es té el costum d'anomenar *déblai* el volum de terres que s'ha de transportar, i anomenar *remblai* l'espai que han d'ocupar després del transport.]

I continua comentant que, com que el preu del transport d'una molècula és proporcional al seu pes i a l'espai que recorre, el preu total del transport ha de ser proporcional a la suma dels productes de les molècules (els seus pesos) multiplicada cadascuna per l'espai recorregut, i també que donat el *déblai* i el *remblai* en figura i posició, no és indiferent que una molècula del *déblai* sigui transportada a un lloc o altre del *remblai*. S'ha d'aconseguir que la suma d'aquests productes sigui la mínima possible per tal de minimitzar el preu del transport.

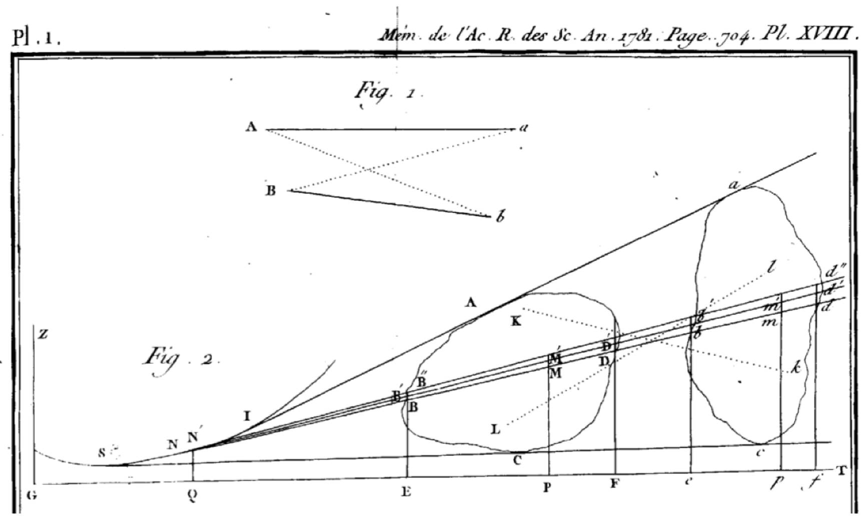


FIGURA 5: Dibuix de Monge del *déblai* i el *remblai*. Les rectes determinen una àrea igual sobre cada figura, $ABD = abd$. Són tangents a una corba. $BD$ ha d'anar a $bd$.

Aquest problema ha donat lloc a la *teoria del transport*, molt usada també en economia. En llenguatge actual es tracta de minimitzar una integral del tipus

$$\int_D \|F(x,y) - (x,y)\| \, dx \, dy,$$

on $D$ és el *déblai* i $F$ la transformació entre *déblai* i *remblai*.

que en realitat no acaba de resoldre, però que li serveix de motivació i que dona lloc a importants desenvolupaments teòrics.

Feta aquesta introducció, Monge divideix la memòria en dues parts: el cas del pla i el cas de l'espai.

### Dimensió 2

Després d'observar que les trajectòries seguides per les molècules no es poden tallar, ja que la suma de distàncies $Ab + Ba$ és major que $Aa + Bb$, torna a repetir l'enunciat pel pla:

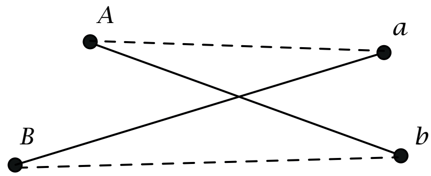


FIGURA 6: Transport en el pla.

*Donades dues àrees iguals, trobar el camí que ha de seguir cada molècula de la primera i el punt on ha d'arribar de la segona per tal que, quan s'han transportat tots els punts, la suma dels productes de cada molècula (el seu pes) per l'espai que ella ha recorregut sigui mínim.* Suposa per simplificar que la densitat és uniforme.[23]

Primer argumenta que si una recta talla el *déblai* i el *remblai* deixant a un mateix costat àrees iguals, les molècules de la primera regió han d'anar a parar a les de la segona.[24] En el dibuix de Monge (figura 5), la regió $ABD$ ha d'anar a la regió $abd$ (sempre utilitza majúscules per al *déblai* i minúscules per al *remblai*). I conclou que, dividint el *déblai* i el *remblai* en una infinitat de petits rombes, cadascun dels rombes del *déblai* ha de ser transportat sobre el corresponent rombe del *remblai*. I que és indiferent en quin ordre les molècules del primer es distribueixen sobre el segon.

Introdueix coordenades i dona una fórmula per a la direcció de cada molècula. La tècnica consisteix a transformar la família biparamètrica de rectes $y = ax + b$ en una família uniparamètrica en imposar que aquestes rectes tallin, del mateix costat, *déblai* i *remblai* en regions d'àrea igual.

Si l'envolvent d'aquesta família uniparamètrica de rectes està a l'esquerra del *déblai*, les seves tangents tallen el *déblai* i el *remblai* en segments $BD$ i $bd$, respectivament. En aquest cas el que s'ha de fer és transportar el segment $BD$ sobre el segment $bd$.

S'adona, però, que, com que trajectòries de punts pròxims es poden tallar, i això no donaria un mínim, cal que la càustica[25] que es forma com a envolvent dels camins es trobi més enllà del *déblai* respecte del *remblai* o més enllà del *remblai* respecte del *déblai*.

23 Com remarca Étienne Ghys a [T9], Monge no es preocupa per l'existència de solucions del problema d'extremals que es proposa resoldre. Tampoc s'ocupa de si, donades dues regions diferents del pla de la mateixa àrea, hi ha una transformació que porta l'una sobre l'altra.

24 Aquesta afirmació no és certa en general, el mateix Monge ho reconeix més endavant, quan diu «la solution précédénte est illusoire».

25 Monge utilitza la paraula *càustica*, paraula que ara es reserva a l'envolvent de rajos de llum.

Un cop coneix la direcció d'una molècula qualsevol (les tangents a l'envolvent), ja és fàcil trobar el preu del transport.

A la secció XIV tracta el cas en què les rutes de les molècules estan subjectes a passar per punts determinats, com per exemple ponts sobre rius o portes en els murs. Quants ponts hi hauria d'haver? Però si en el problema de minimitzar el transport hi entra el preu dels ponts, el tema es complica! Així acaba la primera part de l'article.

## Dimensió 3

La segona part, dedicada al problema del transport en dimensió 3, comença donant els principis de geometria sobre els quals es fonamentaran les idees posteriors.

La primera observació és fonamental[26] i fa referència a famílies biparamètriques de rectes: *si per cada punt d'un pla hi passa una recta de l'espai determinada per una certa llei i prenem una d'aquestes rectes, llavors entre les rectes infinitament pròximes a aquesta només n'hi ha dues, genèricament, que la tallen.*[27]

I posa l'exemple següent. Prenem una recta exterior al pla donat i per cada punt del pla hi tracem la perpendicular a aquesta recta.

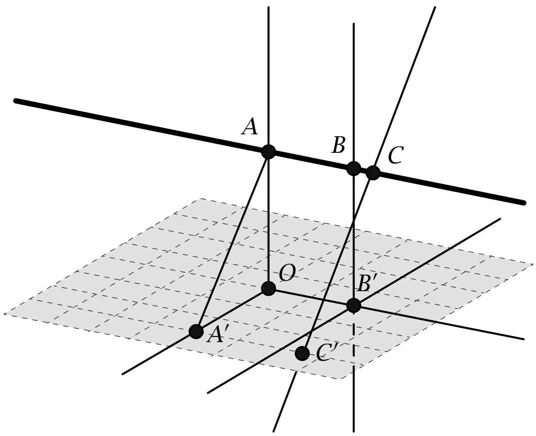


FIGURA 7: Les rectes $AA'$ i $BB'$ determinen, cadascuna d'elles, un pla amb $OA$; en canvi, $CC'$ no.

Només hi ha dues direccions que fan que rectes infinitament pròximes a una de donada es tallin (en particular estiguin en un pla): les determinades

26 Lamentablement és falsa. O certa només sota determinades condicions. Étienne Ghys remarca a [T9] que la fibració de Hopf n'és un contraexemple. La família de rectes de $R^3$ que tallen el pla $z = z_0$ amb vector tangent en $(x, y, z_0)$ donat per $(xz_0 + y, yz_0 - x, z_0^2 + 1)$ no té cap parella de rectes coplanàries, ni a nivell infinitesimal. No poden ser, per tant, les normals a una superfície. Vegeu la nota de la pàgina 132.

27 En lloc de família biparamètrica de rectes també es parla de *congruència de rectes*.

pel pla format per la recta donada i la recta exterior (es tallen a l'infinit) i les determinades pel pla perpendicular a la recta.

A continuació en dona una demostració que pretén ser general però aquesta demostració falla, ja que suposa que una equació de segon grau té sempre arrels reals. És curiós que Monge no faci cap comentari sobre això, tret que la paraula «généralement» quan diu «cette équation du second degré ne donne généralement que deux valeurs» es pugui interpretar en sentit ampli.

I a la secció XX s'hi troba ja en germen el teorema de Monge:

> Il suit de-là que dans le système de droites dont il s'agit on peut toujours passer de deux manières differentes d'une quelconque de ces droites à une autre infiniment proche, qui soit avec elle dans un même plane: cela posé, de l'une quelconque de ces droites, passons en effet à l'une de celles qui la coupe, ensuite et dans le même sens, à celle qui coupe la second, de-là à celle qui dans le même sense coupe la troisième; il est évident qu'en continuant ainsi de suite nous parcourrons une surface développable.
>
> [D'això es dedueix que en el sistema de rectes en qüestió sempre es pot passar de dues maneres diferents d'una qualsevol d'aquestes rectes a una altra d'infinitament propera, que estigui amb ella en un mateix pla: dit això, d'una qualsevol d'aquestes rectes, passem efectivament a una d'aquestes que la tallen, a continuació i en el mateix sentit a la que talla la segona, d'aquí a la que en el mateix sentit talla la tercera; és evident que si continuem d'aquesta manera recorrerem una superfície desenvolupable.]

Quan generalitzem aquest resultat a la família biparamètrica de rectes formada per les normals a una superfície obtenim una part del teorema de Monge. Això és el que fa a la secció XXI: *les normals a una superfície són les interseccions de dues successions de superfícies desenvolupables tals que cada superfície de la primera successió talla totes les de la segona en línies rectes i en angles rectes i recíprocament*.

I ara, a la secció XXII, que reprodueixo íntegrament, és quan ens fa notar que aquí estan apareixent, encara que no ho sembli, les línies de curvatura! El resultat d'aquesta observació és el famós teorema de Monge: *les normals a una superfície sobre les línies de curvatura formen una superfície desenvolupable*.

> Quoique cette proposition ne semble avoir qu'un rapport éloigné avec la belle théorie des rayons de courbure des surfaces courbes qu'a donnée M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1760;[28] cependant, si j'ose parler ainsi, elle complète le travail de cet illustre Géomètre sur cette matière: car les deux points où chaque normale est coupée par les deux normales voisines sont précisément les extrémités des deux rayons de plus grande et de moindre courbure, en sorte que les intersections de la surface courbe avec les surfaces développables qui composent la première suite sont, les lignes de moindre courbure de la surface et que les intersections avec les surfaces développables qui composent l'autre suite sont les lignes de plus grande coubure.

28 Es refereix a [A4].

[Encara que aquesta proposició no sembla tenir gaire a veure amb la bella teoria dels radis de curvatura de les superfícies corbes que va donar el senyor Euler, a les Memòries de l'Acadèmia de Berlín, l'any 1760; no obstant això, si se'm permet dir-ho, completa l'obra d'aquest il·lustre geòmetra d'aquesta manera: com que els dos punts on cada normal és tallada per les dues normals pròximes són precisament els extrems dels dos radis de major i menor curvatura, de manera que les interseccions de la superfície corba amb les superfícies desenvolupables que componen la primera seqüència són les línies de menor curvatura de la superfície i que les interseccions amb les superfícies desenvolupables que componen l'altra successió són les línies de major curvatura.]

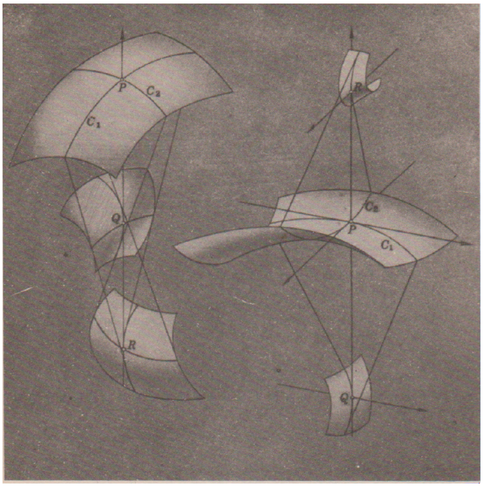

FIGURA 8: Dibuix de Struik [T15, p. 108].[29]

A la secció XXV dona l'expressió dels radis de curvatura a partir de les consideracions que ha fet i veu que coincideix amb la donada per Euler. A la secció XXVI dona les equacions de les línies de curvatura. I això ja no ho va fer Euler. A la secció XXVII troba les evolutes de la superfície donada: llocs geomètrics dels centres de major i menor curvatura de la superfície. A la secció XXIX estudia breument les *línies del contorn aparent* en relació amb aquestes superfícies.

A la secció XXXI dona l'element d'àrea en coordenades principals. En el seu llenguatge troba l'àrea del «quadrat» format per dues corbes «consecutives» de major curvatura amb dues corbes «consecutives» de menor curvatura. Troba també, a la secció següent, el volum del sòlid format per aquest quadrat i les normals a la superfície en els seus punts.

29 La figura de l'esquerra representa una superfície en la que els dos radis de curvatura principal tenen el mateix signe; les evolutes estan en el mateix costat respecte de la superfície. La figura de la dreta representa una superfície en la que els dos radis de curvatura principal tenen signes oposats; les evolutes estan en costats oposats respecte de la superfície. En els dos casos, seguint la normal fins a $\rho_1$ o $\rho_2$ (radis de curvatura principal) trobem dues evolutes de la superfície. Les normals a la superfície són tangents a les evolutes.

Fins a la secció XXXIV no retorna al problema de *déblai* i *remblai*. Aplicant tots els resultats anteriors arriba a la conclusió que les rutes de les molècules, que seran com en el cas pla línies rectes, han de ser les interseccions de dues successions de superfícies desenvolupables tals que cada superfície de la primera successió talli totes les de la segona en angles rectes; i aquesta situació es correspon amb el que succeeix amb les normals a una superfície, com ha vist a la secció XXI, de manera que pot dir que *les trajectòries que han de seguir les molècules del primer volum per arribar a omplir el segon han de ser les normals a una mateixa superfície corba.*

I dona l'equació diferencial d'aquesta superfície. Com fa notar Étienne Ghys, és en aquestes equacions on apareix per primer cop la famosa equació de Monge-Ampère, una equació en derivades parcials de segon ordre que no és ni lineal ni quasi lineal però que és lineal en el hessià i les derivades segones. Si la superfície és $z = z(x, y)$ es compleix

$$F \cdot [\text{hessià}] + G \cdot \left( \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right] \frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \frac{d^2 z}{dx dy} + \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^2 z}{dy^2} \right) +$$

$$+ H \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right] = 0$$

per a determinades funcions $F$, $G$, $H$.

I acaba reconeixent que la solució d'aquest problema està molt lluny de poder ser aplicada a la pràctica, ja que hi intervenen moltes més variables, les molècules no es poden transportar en línia recta, etc.[30]

## 6 *Fulls d'anàlisi*, full XV

En aquesta secció estudiarem les línies de curvatura tal com ho va fer Monge al full XV de les seves *Feuilles d'analyse* [M11], titulat *Des deux courbures d'une surface courbe*. Però totes les idees estan a l'article sobre *déblai* i *remblai* [M2].

La idea de Monge és tan simple com intentar copiar per a superfícies la construcció de l'envolvent de les normals considerada per a corbes planes: l'evoluta d'una corba es pot considerar com la corba que s'obté en tallar normals a la corba donada en punts *infinitament pròxims*. Quan els clàssics parlen de punts infinitament pròxims, com ara en el cas de les normals que estem comentant, volen dir tallar la normal a la corba $\alpha(s)$ en el punt $\alpha(0)$ amb la normal a la corba en el punt $\alpha(\Delta s)$, i a continuació passar al límit quan $\Delta s$ tendeix a zero.

30 Dupin va tractar aquest tema del *déblai* i el *remblai* el 1813 a [A1] i el 1822 a [A2] (tota la tercera part de l'obra, unes seixanta pàgines, està dedicada a aquest tema; es titula *Sur le tracé des routes dans les déblais et les remblais*) tractant d'aclarir, ampliar i justificar punts dèbils de l'article de Monge. Considera casos en què el terreny no és pla i obté solucions ens les quals les trajectòries de les molècules no són rectes.

El problema és que si considerem dues normals a una superfície en punts infinitament pròxims pot passar que aquestes dues normals no es tallin, ja que dues rectes a l'espai normalment no es tallen.

També la idea d'infinitament pròxim s'ha de retocar en el sentit que ara tenim moltes maneres diferents d'acostar-nos a un punt donat. És el mateix problema que hi ha quan passem de l'estudi de derivades de funcions d'una variable a funcions de dues variables.

Tot això es resol de la manera següent. Suposem una superfície donada per la gràfica d'una funció $z = z(x, y)$ que passa per l'origen $O = (0, 0, 0)$ amb pla tangent $z = 0$. Prenem una corba $\gamma(x) = (x, y(x), z(x, y(x)))$ sobre la superfície que passi per $O$ quan $x = 0$.

Voldríem tallar la recta normal a la superfície en el punt $\gamma(x)$ amb la recta normal a la superfície en el punt $O = \gamma(0)$, que és la recta $x = y = 0$. Aquestes rectes potser no es tallen i, per tant, el que farem serà tallar la normal a la superfície en $\gamma(x)$ amb els plans $x = 0$ i $y = 0$.

Obtenim com a punts de tall

$$\left(0, *, z + \frac{x}{p}\right), \quad \left(*, 0, z + \frac{y}{q}\right),$$

on $p$, $q$ són les derivades primeres de $z$ en el punt corresponent. Els asterics són quantitats que tendeixen a zero amb $x$ i no ens calen.

Si volem que en el límit les rectes es tallin, les terceres components d'aquests punts han de coincidir (han de coincidir els punts, però amb les terceres components ja n'hi ha prou). Aplicant la regla de L'Hôpital i recordant que $p(0) = q(0) = 0$, tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{p(x)} = \frac{1}{r + sy'}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{q(x)} = \frac{y'}{s + ty'},$$

on $r$, $s$, $t$ són les derivades segones de $z$ en el punt $x = 0$. Per tant, ha de ser

$$\frac{1}{r + sy'} = \frac{y'}{s + ty'},$$

és a dir,

$$sy'^2 + (r - t)y' - s = 0.$$

Aquesta és l'equació de les direccions principals: *les direccions sobre les quals t'has d'aproximar a un punt per tal que les normals es tallin.*

Com que el producte de les arrels d'aquesta equació de segon grau és $-1$, aquestes direccions són ortogonals. Observem que el discriminant d'aquesta equació és positiu.

Si repetim l'argument que hem usat per calcular les direccions principals a l'origen, però ara treballant sobre un punt arbitrari $P$, obtenim l'equació general de les línies de curvatura.

Teorema. *L'equació diferencial de les línies de curvatura d'una superfície donada com a gràfica de $z = z(x, y)$ és*

$$\begin{vmatrix} y'^2 & -y' & 1 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0.$$

Observem que la segona i tercera files són els coeficients de la primera i segona formes fonamentals.

Nota. Donem un contraexemple a l'afirmació de Monge de la pàgina 127, on afirma que, donada una recta d'una família biparamètrica de rectes, n'hi ha dues d'infinitament pròximes que la tallen. Per a això repetim els càlculs d'aquesta secció per a la família biparamètrica de rectes formada per aquelles rectes que tallen el pla $z = 1$ amb vector director $(x + y, y - x, 2)$, és a dir, les rectes

$$(x, y, 1) + \langle (x + y, y - x, 2) \rangle.$$

Aquesta família s'obté a partir de la fibració de Hopf, com indica É. Ghys a [T9].

Considerem una corba $(t, y(t), 1)$, definida per a valors petits de $t$, amb $y(0) = 0$. Les rectes de la família inicial que passen per aquesta corba tallen el pla $x = 0$ en un punt que té per tercera component

$$1 - \frac{2t}{t + y(t)},$$

i tallen el pla $y = 0$ en un punt que té per tercera component

$$1 - \frac{2y(t)}{y(t) - t}.$$

Si volem que en el límit la recta de la família talli l'eix $z$, que és també una recta de la família (i, per tant, que sigui coplanària amb ella com deia Monge), s'ha de complir

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t + y(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{y(t) - t}.$$

Obtenim, per L'Hôpital,

$$\frac{1}{1 + y'} = \frac{y'}{y' - 1},$$

equació que no té solució sobre els reals.

És a dir, tal com hem comentat a la nota 26 (pàgina 127), la família de rectes donada no té cap parella de rectes coplanàries, ni a nivell infinitesimal. No són les rectes normals a una superfície.

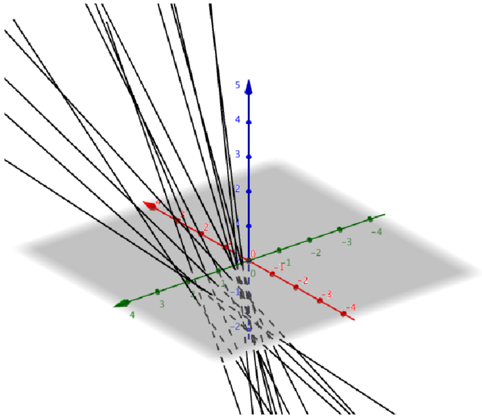

FIGURA 9: La foliació donada pels plans ortogonals a aquestes rectes no és integrable.

## 7 Altres treballs

Comentem breument alguns treballs més de Monge sobre geometria diferencial.

El 1783 publica «Sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires» [M3], on es limita a donar a la primera pàgina un mètode per resoldre equacions diferencials i aplicar-lo a diverses situacions, com ara resoldre la típica equació de les superfícies minimals[31]

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

que atribueix a M. le Chevalier de Borda, a trobar línies de curvatura, etc.

Del 1784 és «Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles» [M5]. Es tracta d'un treball molt extens on torna a integrar l'equació diferencial de les superfícies minimals, recordant novament M. le Chevalier de Borda. El mètode d'integració de Monge és millorat més tard per Legendre a «Mémoire sur l'integration de quelques équations aux différences partielles» [A10], on també corregeix alguns errors comesos per Monge.

El mateix any 1784 estudia la generació de superfícies i publica essencialment la mateixa memòria «Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes» a Torí [M6] i a París [M4].

A la memòria de Torí resol tres problemes que consisteixen a expressar que una superfície corba està generada per: 1) Un cercle que es mou de manera que el seu pla sigui sempre perpendicular a la corba recorreguda pels centres. 2) Un cercle que es mou d'una manera qualsevol. 3) Una corba qualsevol constant de forma que es mou d'una manera qualsevol a l'espai.

A la de París, més detallada i extensa, resol exactament aquests tres mateixos problemes més el següent: *expressar que una superfície corba està generada per una corba plana que es mou de manera que el pla que la conté es manté*

31 Superfíces d'àrea mínima amb vora donada. Estan caracteritzades pel fet de tenir curvatura mitjana zero.

*perpendicular a les corbes recorregudes per tots els seus punts*. De seguida diu que aquestes superfícies es poden definir com les superfícies generades per una corba plana quan el seu pla gira sense lliscar sobre una superfície desenvolupable. Aquestes superfícies reben avui el nom de *superfícies de Monge* i estan caracteritzades perquè les línies de curvatura (les màximes o mínimes) són geodèsiques.[32] Monge demostra que sobre una línia de curvatura l'altra curvatura és constant.

El 1795 publica «Sur les lignes de courbure de la surface de l'Ellipsoïde» [M9], utilitzant les equacions generals de les línies de curvatura, que havia estudiat a «Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais» [M2]. Obté

$$Axyy'^2 + y'(x^2 - Ay^2 - B) - xy = 0,$$

amb

$$A = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}, \quad B = \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2},$$

on $a$, $b$, $c$ són els semieixos de l'el·lipsoide. I de seguida integra l'equació i veu que es tracta d'una secció cònica del tipus $y^2 = \beta x^2 + \gamma$, per certes constants $\beta$, $\gamma$ que s'han d'ajustar. Per tant, es tracta d'una cònica concèntrica amb l'el·lipsoide que serà una el·lipse o una hipèrbola segons el signe de $\beta$. Observem que aquesta cònica és la projecció sobre el pla $z = 0$ de les línies de curvatura.

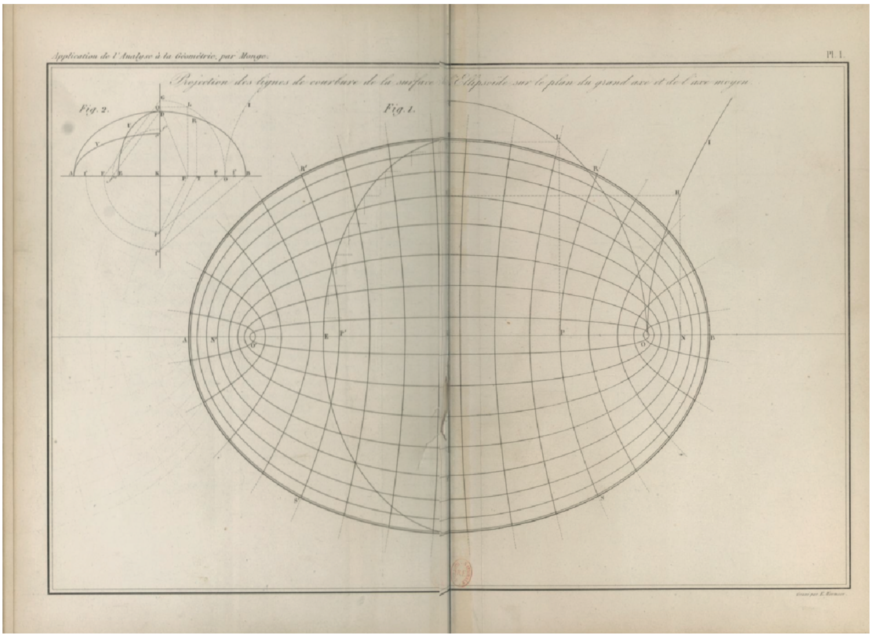


FIGURA 10: Línies de curvatura de l'el·lipsoide [M18].

32 Recordem que les línies de curvatura tenen torsió geodèsica zero i que sobre les geodèsiques la torsió i la torsió geodèsica coincideixen. Per tant, una geodèsica i línia de curvatura és plana. A partir d'aquí es pot recuperar el resultat de Monge amb relativa facilitat.

Posteriorment reprodueix aquests treballs a la secció XVI d'*Application de l'analyse à la géométrie* [M18].

La idea és intentar fer un arc de pedra, com ara una porta, però de manera que la corba suport no sigui un arc de circumferència sinó un arc, per exemple, d'el·lipse. El picapedrer ha de tallar les pedres que van a sobre d'aquest arc de manera que s'acoblin bé entre elles, i els picapedrers piquen en línies rectes, de manera que ja es veu que la pedra ha d'estar tallada com una superfície reglada, però el que no és tan evident és que hagi de ser també desenvolupable.

Monge ho diu així:

> S'il étoit question de voûter un space circonscrit en projection horizontale par une ellipse, on ne pourroit pas donner à la voûte une surface plus convenable que celle de la moitié d'une ellipsoïde [...] et en supposant que cette voûte dût être exécuté en pierres de taille, il faudrait que la division en voussoirs fût opérée au moyen des lignes de courbure [...] et que les joints fussent les surfaces développables normales à la voûte.
>
> [Si es tractés de fer una volta sobre un espai circumscrit en projecció horitzontal per una el·lipse, no es podria donar a la volta una superfície més adequada que la de la meitat d'un el·lipsoide [...] i suposant que aquesta volta s'executés en pedres tallades, seria necessari que la divisió en dovelles es fes per mitjà de les línies de curvatura [...] i que les juntes fossin les superfícies desenvolupables normals a la volta.]

Comenta que en aquell moment s'estan construint les sales per als consells de la legislatura i que la millor forma que se'ls pot donar és l'el·líptica i que estigui coberta per un el·lipsoide. Llavors es posaria la tribuna d'oradors just sota un dels punts umbilicals de la volta. I es podria decorar l'espai posant columnes seguint les línies de curvatura. I s'imagina també dos llums d'aranya penjant dels umbilicals!

A l'article de J. Sakarovitch «Gaspard Monge founder of "Constructive Geometry"» [T13], es reprodueix la figura següent (figura 11), que atribueix a Leroy, 1844.[33] Es veu la volta el·lipsoidal amb les pedres superiors o dovelles acoblades entre elles perpendicularment a la superfície que les aguanta.

El 1801 es publiquen les *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie à l'usage de l'École polytechnique* [M11], però les primeres notes amb aquest nom per als estudiants de l'École polytechnique són del 1795. Els alumnes anomenaven aquest llibre «Le gros Monge».

En una nota del 1799, «Des courbes à double courbure» [M19], es complementen qüestions sobre les corbes de doble curvatura que falten a les *Feuilles*. Aquest article acaba amb una nota a peu de pàgina d'Hachette,[34] que diu:

33 El llibre IV del *Traité de stéréotomie* de Leroy (1780–1854) [A11] es diu «Coupe des Pierres», i té una secció que es titula «Voûte en ellipsoïde à trois axes inégaux. Emploi des lignes de courbure». El dibuix que reprodueix Sakarovitch és la planxa 44 de [A11].

34 Jean Nicolas Pierre Hachette va ser un dels més importants impulsors del *Journal de l'École polytechnique*. Va col·laborar estretament amb Monge sobretot en l'estudi i les aplicacions de la geometria descriptiva. Va estudiar els radis de curvatura de les superfícies a «De quelques propriétés des rayons de courbure d'une surface» [A7].

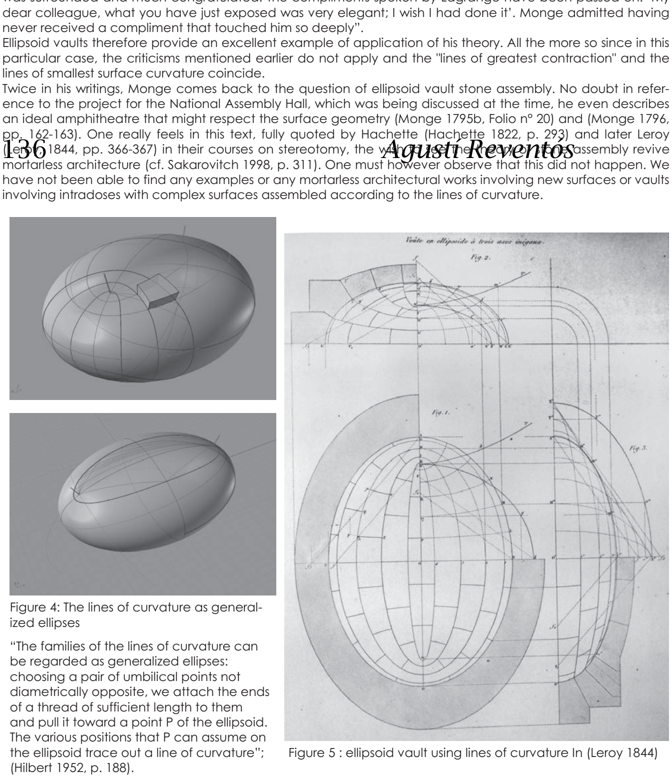
dear colleague, what you have just exposed was very elegant; I wish I had done it'. Monge admitted having never received a compliment that touched him so deeply".
Ellipsoid vaults therefore provide an excellent example of application of his theory. All the more so since in this particular case, the criticisms mentioned earlier do not apply and the "lines of greatest contraction" and the lines of smallest surface curvature coincide.
Twice in his writings, Monge comes back to the question of ellipsoid vault stone assembly. No doubt in reference to the project for the National Assembly Hall, which was being discussed at the time, he even describes an ideal amphitheatre that might respect the surface geometry (Monge 1795b, Folio n° 20) and (Monge 1796, pp. 162-163). One really feels in this text, fully quoted by Hachette (Hachette 1822, p. 293) and later Leroy (Leroy 1844, pp. 366-367) in their courses on stereotomy, the wish to see the theory of stone assembly revive mortarless architecture (cf. Sakarovitch 1998, p. 311). One must however observe that this did not happen. We have not been able to find any examples or any mortarless architectural works involving new surfaces or vaults involving intradoses with complex surfaces assembled according to the lines of curvature.



Figure 4: The lines of curvature as generalized ellipses

"The families of the lines of curvature can be regarded as generalized ellipses: choosing a pair of umbilical points not diametrically opposite, we attach the ends of a thread of sufficient length to them and pull it toward a point P of the ellipsoid. The various positions that P can assume on the ellipsoid trace out a line of curvature"; (Hilbert 1952, p. 188).

Figure 5 : ellipsoid vault using lines of curvature In (Leroy 1844)

FIGURA 11: Dovelles sobre el·lipsoide.

> Cet écrit pourra suppléer à ce qui manque sur les Courbes à double courbure dans les feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, que le C.[en] Monge a fait imprimer pour les élèves de l'École polytechnique.
>
> [Aquest escrit podrà suplir el que manca sobre les corbes de doble curvatura a les *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, que el ciutadà Monge ha fet imprimir per als alumnes de l'École polytechnique.]

Edicions posteriors de les *Feuilles*, fetes a partir del 1807, portaven per títol *Application de l'analyse a la géométrie*. Liouville va tenir cura de la cinquena edició, de 675 pàgines, que va corregir i comentar, vegeu [M18]. A la secció 6 hem estudiat el full XV.

Aquesta edició de Liouville està composta de vint-i-set seccions, dedicades totes al que podríem anomenar de manera genèrica *generació de superfícies*. Per exemple: «X. De la superfície engendrada pel moviment d'una línia recta paral·lela a un pla fixat», «XII. Superfícies desenvolupables», «XVII. De la generació de la superfície corba en la qual totes les línies d'una de les curvatures estan en plans paral·lels a un pla donat», «XX. De la superfície corba en la qual els dos radis de curvatura són sempre iguals i de signes contraris», «XXII. De la superfície corba que envolta una successió d'esferes de radi variable i centres sobre una corba qualsevol», «XXIII. Article [M12]», «XXIV. Article [M13]», «XXV. Article [M14]», «XXVI. Article [M15]», «XXVII. Article [M7]».

A continuació Liouville reprodueix la memòria immortal de C. F. Gauss traduïda al francès amb el títol «Recherches sur la théorie géneral des surfaces courbes» [A5]. I acaba amb unes famoses set notes: «I. Sobre les corbes de doble curvatura», «II. Expressions diverses de la distància de dos punts infinitament pròxims i de la curvatura geodèsica de les línies sobre una superfície», «III. Teorema sobre la integració de les línies geodèsiques», «IV. Sobre el teorema de Gauss sobre el producte dels dos radis de curvatura principals en cada punt d'una superfície», «V. Del traçat geogràfic de superfícies, les unes sobre les altres», «VI. Extensió al cas de tres dimensions de la qüestió del traçat geogràfic», «VII. Sobre l'equació de les cordes vibrants».

El 1802 Monge publica «Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère» [M12], on introdueix el nom de corba *característica* dient:

> C'est à cette courbe, dont toutes les surfaces soumises à la même génération sont pour ainsi dire composées,[35] qu'on aurait dû consacrer le nom de *génératrice*; mais ce mot est déjà employé dans un sens qui n'est pas toujours le même que celui-ci: j'ai donc cru nécessaire de me servir d'un mot nouveau, et j'ai nommé cette courbe *caractéristique*.
>
> [És a aquesta corba, de la qual totes les superfícies sotmeses a la mateixa generació estan per així dir compostes, que se li hauria d'haver assignat el nom de *generatriu*; però aquest nom ja s'utilitza en un sentit que no és el mateix que aquest d'aquí: he cregut, doncs, necessari servir-me d'una nova paraula, i he anomenat aquesta corba *característica*.]

Veu, entre altres coses, que una superfície que satisfà les hipòtesis del títol és tal que l'esfera és el lloc geomètric dels centres d'una de les seves curvatures. Amplia aquest tipus de resultats canviant l'esfera per una superfície cònica arbitrària a «Sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire» [M13], publicat just a continuació de l'anterior.

El 1805, apareix el llibre de Monge i Hachette, *Application de l'algèbre a la géométrie* [M21], que recull diversos treballs de Monge. De fet, ja el 1802 havien publicat un article amb el mateix nom al *Journal de l'École polytechnique* [M20], base del llibre posterior. Abans de començar diu (observeu les dates segons el nou calendari imposat per la Revolució Francesa):

> AVERTISSEMENT
>
> Lés Éleves de l'École polytechnique ont trouvé jusqu'a present le précis des leçons sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie, dans les Feuilles d'analyse de *Monge*, et le Mémoire sur les surfaces du second degré, imprimé en l'an 10 dans le Journal de l'École. Tous les exemplaires de ce Mémoire, tirés à part lors de la publication du Journal, ayant été distribués, MM. MONGE et HACHETTE on proposé de le remplacer par un ouvrage ayant pour titre: «Surfaces du premier et second degré», le Conseil d'instruction, dans sa séance du 19 pluviose an 13, a arrété que cet Ouvrage seroit imprimé pour l'École.
>
> [Els alumnes de l'École polytechnique han trobat fins ara els apunts de les lliçons sobre l'aplicació de l'àlgebra a la geometria, a les *Feuilles d'analyse de Monge*, i a la Memòria sobre les superfícies de segon grau, impresa l'any 10

35 Abans ha posat, com a exemple d'aquesta corba, els meridians de les superfícies de revolució.

a la revista de l'Escola. Havent estat distribuïts tots els exemplars d'aquesta Memòria, impresos per separat quan es va publicar el *Journal*, els senyors MONGE i HACHETTE han proposat reemplaçar-la per una obra que té per títol: «Surfaces du premier et second degré», el Conseil d'Instruction, en la seva sessió del 19 pluviós any 13, ha donat permís perquè aquesta obra sigui impresa per l'Escola.]

El llibre està compost de les vuit seccions següents: «I. Equacions d'un punt», «II. Equacions de la línia recta», «III. Equacions del pla», «IV. Problemes relatius a rectes i plans», «V. Canvis de coordenades», «VI. Del centre i dels plans diametrals d'una superfície», «VII. Superfícies de segon grau», «VIII. Superfícies de segon grau quan les coordenades del centre són a l'infinit».

El 1806 publica dos articles llargs consecutius al *Journal de l'École polytechnique*. Els títols són explícits del seu contingut, el primer es titula «Sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque» [M14], i toca el mateix tema que en els anteriors [M12] i [M13], i el segon «De la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure quelconque» [M15]. Estudia, doncs, tubs.

El 1807 envia a l'École polytechnique una breu solució del problema de trobar una superfície desenvolupable que tingui com a aresta de retrocés una corba donada, que Hachette recull a *Correspondance sur l'École impériale polytechnique* [M16]. També d'aquest any és la nota conjunta amb Hachette «Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes» [M22]. Defineixen *punt brillant* com el punt de la superfície que reflecteix un raig lluminós cap a l'ull de l'espectador. No hi ha cap fórmula, només consideracions geomètriques.

El 1810 envia una nota a l'École titulada «Sur les équations différentielles des courbes du second degré» [M17]. Diu que plantejar-se aquest problema per a corbes de grau arbitrari li sembla «une enterprise inutile». Però que, per la seva importància, val la pena fer-ho per a les corbes de segon grau. Com que les seves equacions són

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0,$$

posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{dx} = s, \quad \frac{ds}{dx} = t,$$

s'obté

$$9q^2t - 45qrs + 40r^3 = 0$$

com a equació diferencial de totes les corbes de segon grau.

El 1811 es publica la seva famosa *Géométrie descriptive* [M10], on hi ha un capítol titulat «Des plans tangents et des normales aux surfaces courbes», en el qual es parla de canons, de l'enemic, etc. És molt curiós l'esperit patriòtic que destil·la la introducció.

> Pour tirer la nation fraçaise de la dépendance oú elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut premièrement diriger l'education nationale vers la connaisance des objets qui exigent de l'exactitud [...] et, à cet égard, il aut l'avouer, nous avons beaucoup à puiser chez les nations étrangères.
>
> C'est d'abord en familiarisant avec l'usage de la Géométrie descriptive tous les jeunes gens qui ont de l'intelligence, tant ceux qui ont une fortune acquise, afin qu'un jour ils soient en état de faire de leurs capitaux un emploi plus utile et pour eux et pour l'État, que ceux mêmes qui n'ont d'autre fortune que leur éducation, afin qu'ils puissent un jour grand prix à leur travail.
>
> [Per treure la nació francesa de la dependència que ha tingut fins ara de la indústria estrangera, cal dirigir primer l'educació nacional cap al coneixement d'objectes que requereixen exactitud [...] i, en aquest sentit, ho hem de confessar, tenim molt a aprofitar de les nacions estrangeres.
>
> En primer lloc familiaritzant tots els joves amb intel·ligència en l'ús de la geometria descriptiva, tant els que tenen fortuna adquirida, perquè un dia estiguin en condicions de fer dels seus capitals un ús més útil per a ells i per a l'Estat, com aquells que no tenen més fortuna que la seva educació, de manera que un dia puguin donar més valor al seu treball.]

Espero que aquest treball apropi els futurs alumnes de geometria diferencial de les nostres universitats a la figura de Monge i al context en què es va iniciar l'estudi de corbes i superfícies.

## 8 François Aragó

**per Josep Lluís Solé**

Per conèixer la vida de F. Aragó[36] (1786–1853) us recomanem amb entusiasme l'autobiografia titulada *Història de la meva joventut* (col·lecció Popular Barcino, núm. 155), publicada per Editorial Barcino (1937), reimprès per Artífex Cultural, Palma (2000), que redactà quan, com diu ell mateix, ja era vell i estava malalt. Es llegeix com una magnífica novel·la d'aventures.

En el llibre ens parla de la seva infantesa al poble d'Estagell, al Rosselló, i la seva adolescència a Perpinyà. També de la preparació de l'examen d'ingrés a l'École polytechnique, estudiant en solitari obres de Legendre, Lacroix i Garnier... examen que feu a Tolosa, davant d'un tribunal presidit per Monge, que primer el rebé amb desconfiança. L'examen durà dues hores i acabà amb l'abraçada de Monge, impressionat pels coneixements del jove Aragó.

Ens hi explica l'ambient de l'École polytechnique, lligada als moments polítics difícils de la França de la primera dècada del segle XIX. Allí conegué i feu amistat amb Laplace. Junt amb altres estudiants es negà a signar el document d'adhesió a la proclamació de Napoleó com a emperador, i per això el general Lacuée, director de l'École, proposà la seva expulsió. Napoleó demanà a Lacuée

36 En aquesta secció s'ha respectat la grafia del cognom amb accent emprada per Josep Lluís Solé.

quin lloc de la promoció ocupava Aragó, i en veure a la llista que era el primer digué: «Ah, si haguessin estat a la cua!... Senyor Lacuée, deixeu-ho córrer...».

El 1804 fou nomenat secretari de l'Observatori de París recomanat per Poisson, professor del jove Aragó a la polytechnique. Demanà a Laplace, director de l'Observatori, reprendre les mesures del meridià de París a Espanya, interrompudes per la mort de Méchain.

Encara que trossos d'aquest meridià havien estat objecte de distintes campanyes de mesura anteriors (Picard, Cassini I, Cassini II, La Hire, Maraldi...), quan l'Assemblea Nacional decidí (1791) establir un patró de mesura que pogués ser acceptat per totes les nacions, l'Acadèmia proposà tornar a mesurar el meridià de París, però aquesta vegada no només en territori de França, sinó arribar fins a Barcelona (el meridià de París entra al Mediterrani a la platja d'Ocata, al Maresme). Delambre fou l'encarregat de mesurar la part nord, de Dunquerke a Rodés, i Méchain, la part sud, de Rodés a Barcelona. Les mesures començaren el dia abans de la presa de la Bastilla, i la història d'aquesta campanya científica, feta en moments convulsos, mereix una explicació a part.

El 1801, Méchain, director de l'Observatori de París, demanà prolongar les mesures del meridià de Barcelona a les Balears (el meridià de París talla sa Dragonera, i deixa l'illa de Mallorca totalment a llevant seu). Per fer-ho, proposà triangular la costa de Castelló i València per poder fer el salt a Eivissa i Formentera, i d'allí a la serra de Tramuntana de Mallorca. El 1803 Méchain començà els treballs, però morí el setembre del 1804 sense poder acabar el seu encàrrec.

F. Aragó i J.-B. Biot foren, doncs, comissionats per acabar les mesures de Méchain, i són les anècdotes d'aquesta expedició, iniciada a principis del 1806, les que ocupen la gran part del llibret que hem esmentat al principi. Ens hi explica la seva estada al cim del desert de València durant sis mesos intentant visualitzar el turó des Camp Vell, a Eivissa, a 150 km de distància. Les trobades i amistat amb els bandolers de prop de Cullera, al sud de València; la persecució d'un amant gelós a Sagunt; l'estada a la Mola de Formentera, en una casa que encara avui existeix, i la construcció d'una cabana de pedra al cim de la Mola de s'Esclop, sobre Andratx, últim vèrtex del darrer triangle, hi són descrits amb molta amenitat.

A la Mola de s'Esclop el sorprengué l'aixecament contra Napoleó (1808). Avisat que, com que el poble creia que era un espia, el pujaven a matar, fugí vestit de pastor i es refugià a Palma. Allí fou tancat al castell de Bellver, d'on escapà, i pujà a un vaixell que el portà a Alger. Embarcà cap a França, però un corsari de Roses capturà el vaixell, i Aragó, sense donar-se a conèixer i fent-se passar per català, fou tancat a la ciutadella de Roses i a Palamós. Alliberat, un vaixell l'havia de portar a Marsella, però una tempesta desvià el vaixell a Bugia, a les costes algerianes, on, després d'un viatge arriscat, pogué arribar al consolat francès d'Alger. Allí s'embarcà en un vaixell de bandera algeriana, i arribà finalment a Marsella el juny del 1809, evitant el bloqueig de la flota anglesa. Tot això amb la llibreta d'observacions amagada a la seva roba!

Un any després (1809) fou elegit membre de l'Acadèmia, per a una vacant a la qual també aspirava D. Poisson, que hagué d'esperar tres anys a poder-hi accedir. En el darrer capítol de *Memòries de la meva joventut* ens explica la seva activitat com a acadèmic, fins al seu nomenament com a secretari perpetu el 1830, i la seva renúncia la plaça de professor de l'École polytechnique a favor de Fourier.

No descriurem en aquestes notes de caràcter biogràfic l'obra científica d'Aragó, però sí que volem assenyalar que no abandonà el seu compromís polític. Fou membre del govern provisional de la Segona República, sorgida després de la Revolució del 1848, el qual establí el sufragi universal i l'abolició de l'esclavitud a França. Com a ministre de la guerra i de marina va suprimir els càstigs corporals a l'armada i millorà el tracte als mariners (vegeu el capítol 6 del llibre de P. Murdin *Full Meridian of Glory*, Nova York, Springer Bussiness Media, 2000).

Quan Napoleó III restablí l'imperi el 1851, Aragó es retirà de la vida política, però li permeteren continuar sent director de l'Observatori fins que es retirà a Estagell el 1853.

### Agraïments

Agraeixo a Josep Lluís Solé Clivillés que ens hagi cedit el text sobre François Arago, així com la redacció del peu de pàgina 8. I a David Marín que em va ajudar en els càlculs sobre la fibració de Hopf.

## Treballs de Monge

[M1] Monge, G. «Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres». *Mémoires de Mathématique et de Physique [Mémoires des Savants Étrangers]*, 9 (1780), 382–440.

[M2] Monge, G. «Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais». *Histoire de l'Académie royale des sciences* [París] (1781), 666–704.

[M3] Monge, G. «Sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires, lorsqu'elles sont élevées, et dans les cas où leurs intégrales complètes sont algébriques». *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris* (1783), 719–724.

[M4] Monge, G. «Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes». *Histoire de l'Académie royale des sciences. Mémoires de Mathématique et de Physique* [París] (1784), 85–117.

[M5] Monge, G. «Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles». *Mémoires de Mathématique et de Physique [Mémoires des Savants Étrangers]* (1784), 118–192.

[M6] Monge, G. «Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes». *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin* (1784), 19–33.

[M7] Monge, G. «Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les differens genres d'inflexions des courbes à double courbure». *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France*, x (1785), 511–550. [Vegeu també [M18, 392–420]]

[M8] Monge, G. «Stéréotomie». *Journal polytechnique* ou *Bulletin du travail*, 1er cahier (1794), 1–15.

[M9] Monge, G. «Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde». *Journal de l'École polytechnique* ou *Bulletin du travail*, 2e cahier (1795), 145–165. [Reproduït a la secció xvi, p. 139, de [M18]]

[M10] Monge, G. *Géométrie descriptive. Leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la République*. París: Baudouin, 1799. [N'hi ha moltes edicions, per exemple una de Klostermann de 1811 i una de Jacques Gabay de 1989]

[M11] Monge, G. *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie à l'usage de l'École polytechnique*. París: Baudouin, 1801. [Éditions Jacques Gabay en fa una reimpressió el 2008]

[M12] Monge, G. «Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère». *Journal de l'École polytechnique*, 11e cahier, iv (1802), 28–58.

[M13] Monge, G. «Sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire». *Journal de l'École polytechnique*, 11e cahier, iv (1802), 59–86.

[M14] Monge, G. «Sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque». *Journal de l'École polytechnique*, 13e cahier, vi (1806), 1–40.

[M15] Monge, G. «De la surface courbe qui enveloppe l'espace parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure quelconque». *Journal de l'École polytechnique*, 13e cahier, vi (1806), 41–59.

[M16] Monge, G. «Trouver l'équation de la surface développable, qui a pour aréte de rebroussement une courbe à double courbure, dont on connaît l'équation unique aux différences ordinaires?». A: Hachette, J. N. P. (ed.). *Correspondance sur l'École impériale polytechnique* (Avril 1804–Mars 1808). Vol. i. París: Klostermann, 1807, 209–211.

[M17] Monge, G. «Sur les équations différentielles des courbes du second degré». A: Hachette, J. N. P. (ed.). *Correspondance sur l'École impériale polytechnique* (Janvier 1809–Mars 1813). Vol. ii. París: Klostermann, 1810, 51–54.

[M18] Monge, G. *Application de l'analyse à la géométrie*. 5a ed., revisada, corregida i anotada per J. Liouville. París: Bachelier, 1850. [1a ed., 1807]

[M19] MONGE, G.; HACHETTE, J. N. P., «Des courbes à double courbure. (Extrait des Ouvrages du C.$^{en}$ Gaspard Monge.)» *Journal de l'École polytechnique* ou *Bulletin du travail*, 6e cahier, II (1799), 345–363.

[M20] MONGE, G.; HACHETTE, J. N. P. «Application d'àlgebre à la géométrie». *Journal de l'École polytechnique*, 11e cahier, IV (1802), 143–170.

[M21] MONGE, G.; HACHETTE, J. N. P. *Application de l'algèbre a la géométrie. Des surfaces du premier et second degré, a l'usage de l'École polytechnique*. París: Bernard, 1805.

[M22] MONGE, G.; HACHETTE, J. N. P. «Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes». A: HACHETTE, J. N. P. (ed.). *Correspondance sur l'École impériale polytechnique* (Avril 1804–Mars 1808). Vol. I. París: Klostermann, 1807, 295–305.


## Treballs sobre Monge


[T1] ARAGO, F. «Biographie de Gaspard Monge». *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, XXIV (1854), I–CLVII. [Llegit a la sessió pública de l'11 de maig de 1846]

[T2] BELHOSTE, B. «Gaspard Monge: Urgences revolutionnaires et utopie». *Cahiers du Mouvement universel de la responsabilité scientifique (MURS)*, 17 (1989), 55–75.

[T3] BRISSON, B. *Notice historique sur Gaspard Monge*. París: Plancher, Éditeur du Manuel des Braves, 1818.

[T4] CHAPELON, J. «Monge, géomètre et Jacobin». *La Pensée, Nouvelle Série*, 13 (1947).

[T5] DE LAUNAY, L. *Un grand français. Monge fondateur de l'École polytechnique*. París: Éditions Pierre Roger, 1933.

[T6] DE PONGERVILLE, J.-B. S. *Gaspard Monge et l'expedition d'Égypte*. París: Challamel Ainé, éditor, 1860.

[T7] DUPIN, CH. *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*. París: Bachelier, 1819.

[T8] ETAYO, J. J. «Las bases de la Geometría Diferencial». *Historia de la Matemática en el siglo* XIX *(2$^{a}$ parte)*. Curs de conferències durant els mesos de febrer a abril del 1993. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1993, 171–190.

[T9] GHYS, É. «Gaspard Monge. Le mémoire sur les déblais et les remblais». A: *Images des Mathématiques* (2012), 1–24. [Article adjunt a l'obra «Gaspard Monge, le beau, l'utile et le vrai», disponible a `http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge`]

[T10] GUYON, N. *Éloge funèbre de M. Monge, compte de Peluze*. París: Plancher, Éditeur du Manuel des Braves, 1818.

[T11] LANGEVIN, R. «Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure». A: *De la méthode*. Besançon: Press. Univ. Franc-Comtoises, 2002, 127–154. (Colloq. Sémin.)

[T12] RAVAILHE, F. *Éloge de Gaspard Monge*. Beaune: Imprimerie de Blondeau-Dejussieu, 1849.

[T13] SAKAROVITCH, J. «Gaspard Monge founder of "Constructive Geometry"». A: *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*. Cottbus: Brandenburg University of Technology, 2009, 1293–1300.

[T14] SERGESCU, P. «Le bicentenaire de Gaspard Monge». *Rev. Histoire Sci. Appl.*, 1 (2) (1947), 162–170.

[T15] STRUIK, D. J. *Geometría Diferencial Clásica*. Madrid: Aguilar, 1970. [Traducció de *Lectures on Classical Differential Geometry*. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1950]

[T16] TATON, R. *L'œuvre scientifique de Monge*. París: Presses Universitaires de France, 1951.

[T17] TATON, R. «La première note mathématique de Gaspard Monge (juin 1769)». *Rev. Histoire Sci. Appl.*, 19 (2) (1966), 143–149.

## Altres

[A1] DUPIN, CH. *Développements de géométrie, Avec des Applications à la stabilité des Vaisseaux, aux Déblais et Remblais, au Défilement, à l'Optique, etc.; ouvrage approuvé par l'Institut de France, pour faire suite a la Géométrie Descriptive et a la Géométrie Analytique de M. Monge*. París: M. V. Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, 1813.

[A2] DUPIN, CH. *Applications de géométrie et de méchanique a la marine, aux ponts et chausses, etc., pour faire suite aux «Développements de géométrie»*. París: Bachelier, successeur de M. V. Courcier, 1822.

[A3] EISENMAN. «Stéréotomie». *Journal polytechnique* ou *Bulletin du travail*, 2e cahier (1795), 100–106; 3e cahier (1795), 440–442; 4e cahier (1796), 619–622.

[A4] EULER, L. «Recherches sur la courbure des surfaces». *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 16 (1767), 119–143. [Publicat també a *Opera Omnia, Serie 1*, 28 (1955), 1–22]

[A5] GAUSS, C. F. «Disquisitiones generales circa superficies curvas». *Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae*, VI (1828), 99–146. [Presentat el 8 d'octubre del 1827]

[A6] GIRBAU, J. *Memoria sobre el concepto, método y fuentes de la geometría diferencial*. Barcelona: 1973. [Apunts]

[A7] HACHETTE, J. N. P. «De quelques propriétés des rayons de courbure d'une surface». A: HACHETTE, J. N. P. (ed.). *Correspondance sur l'École impériale* *polytechnique* (Avril 1804–Mars 1808). Vol. I. París: Klostermann, 1807, 213–218.

[A8] Lacroix, S. F. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. 3 vol. París: Duprat, 1797–1800. [N'hi ha diverses edicions posteriors, editades per Bachelier, París. La que citem en el text de 1810 és editada per Chez Courcier, i porta el subtítol «Seconde édition, revue et augmentée»]

[A9] Lancret, M. A. «Mémoire sur les courbes a double courbure». A: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France*, I (1802), 416–454. [Llegit el 6 de floreal de l'any 10]

[A10] Legendre, A.-M. «Mémoire sur l'integration de quelques équations aux différences partielles». *Histoire de l'Académie royale des sciences*, París (1789), 309–351. [Llegit l'1 de setembre de 1787]

[A11] Leroy, C. F. A. *Traité de stéréotomie, comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente*. París: Bachelier, 1844.

[A12] Olivier, T. «Mémoire de géométrie. De la courbure et la flexion d'une courbe a double courbure». *Journal de l'École royale polytechnique*, 24e cahier, 15 (1835), 61–92.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
agusti@mat.uab.cat